

## Lunghezza di una curva

Sia

$$y = f(x)$$

la lunghezza di tale curva è:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

Se la curva è data in forma implicita:

$$F(x; y) = 0$$

allora:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{F_x'^2(x; y)}{F_y'^2(x; y)}} dx$$

Se la curva è data in forma parametrica:

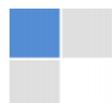
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$$

Se la curva è data in forma polare:

$$\rho = f(\vartheta)$$

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)} d\vartheta$$



### Esempio 1

Determinare la lunghezza della curva di equazione  $y = 2\sqrt{5x^3}$  situata nel primo quadrante compreso fra le ordinate corrispondenti alle ascisse  $x=0$  e  $x=1$ .

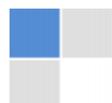
$$\text{Applichiamo } L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Calcoliamo la derivata di  $y = 2\sqrt{5x^3}$

$$f'(x) = 2 \frac{15x^2}{2\sqrt{5x^3}} = \frac{15x^2}{\sqrt{5x^3}}$$

Pertanto:

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{15x^2}{\sqrt{5x^3}}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx = \int_0^1 (1 + 9x)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{9} \int_0^1 (1 + 9x)^{\frac{1}{2}} \cdot 9 dx = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \left[ (1 + 9x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{27} (10\sqrt{10} - 1)$$



## Esempio 2

Determinare la lunghezza dell'arco di curva di equazione:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}t^2 \\ y = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$$

Nell'intervallo

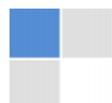
$$0 \leq t \leq 2$$

Calcoliamo le derivate:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}2t \\ y' = \frac{1}{3}3t^2 \end{cases}; \begin{cases} x' = t \\ y' = t^2 \end{cases}$$

Pertanto:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(x)} dt = \int_0^2 \sqrt{t^2 + t^4} dt = \int_0^2 t\sqrt{1+t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^2 (1+t^2)^{1/2} 2t dt = \frac{1}{2} \frac{2}{3} [(1+t^2)^{3/2}]_0^2 = \frac{1}{3} (5\sqrt{5} - 1)$$



### Esempio 3

Data la curva

$$\rho = \operatorname{sen}\vartheta + \cos \vartheta$$

determinare la sua lunghezza nell'intervallo  $0 \leq \vartheta \leq \pi$

Applichiamo:

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)} d\vartheta$$

Calcoliamo la derivata di  $\rho = \operatorname{sen}\vartheta + \cos \vartheta$ :

$$\rho' = \cos \vartheta - \operatorname{sen}\vartheta$$

$$L = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{\rho^2(\vartheta) + \rho'^2(\vartheta)} d\vartheta = \int_0^{\pi} \sqrt{(\operatorname{sen}\vartheta + \cos \vartheta)^2 + (\cos \vartheta - \operatorname{sen}\vartheta)^2} d\vartheta = \int_0^{\pi} \sqrt{2} d\vartheta = \sqrt{2} [\vartheta]_0^{\pi} = \sqrt{2}\pi$$

